Monika Bastijanić[1]
Mirta Mataija[2]
Mirjana Rakamarić Šegić[3]

Stručni rad
UDK 519.8:658.5

MATEMATIČKE METODE U FUNKCIJI ANALIZE I OCJENE POSLOVANJA PODUZEĆA KAVA SANTOS D. O. O.[4]

SAŽETAK

Rad bazira se na primjeni rezultata znanstvene discipline operacijska istraživanja – usmjerenoj na područje linearnog programiranja i mrežnog planiranja, a u cilju analize poslovanja tvrtke Kava Santos d. o. o., koja svoje poslovanje temelji na proizvodnji slastica za vlastite potrebe i za poslovne partnere. Cilj ovoga rada je primjenom odgovarajućih matematičkih metoda maksimizirati prihod poduzeća Kava Santos d. o. o. u dijelu koji se odnosi na proizvodnju pet različitih vrsta slastica uz unaprijed postavljena ograničenja. Ograničenja podrazumijevaju raspoloživost određenih sastojaka, ljudskih kapaciteta, vremena potrebnog za izvršenje određene djelatnosti i njihovih troškova. Analiza poslovanja izvršena je upotrebom dviju komplementarnih metoda koje pripadaju gore navedenoj znanstvenoj disciplini. To su Charnesova M procedura, korištena u prvom dijelu, te metoda PERT, korištena u drugom dijelu rada. Kako bi se ove metode mogle efikasno primijeniti na konkretnom zadatku, proces proizvodnje slastica raščlanjen je na pojedine komponente, odnosno aktivnosti, uzimajući u obzir potrebno vrijeme i trošak za izvođenje svake od njih. Primjenom matematičkih metoda na analizu poslovanja tvrtke Kava Santos d. o. o. dobiveni su rezultati kojima je moguće smanjiti troškove i vrijeme proizvodnje, utvrditi koji je proizvod uz sličan princip rada najisplativije proizvoditi, te u konačnici proizvođaču osigurati veću dobit, a istovremeno zadržati kvalitetu proizvoda.

Ključne riječi: *linearno programiranje, operacijska istraživanja, Charnesova M procedura, metoda PERT*

1. UVOD

1.1 Predmet i ciljevi istraživanja

U ovom radu izvršit ćemo analizu poslovanja tvrtke Kava Santos d. o. o. kako bismo na temelju kvantitativnih podataka donijeli zaključak može li se i kako poslovanje poboljšati. U analizi poslovanja koristit ćemo metode linearnog programiranja i mrežnog planiranja.

---

[1] Studentica, stručna specijalistica inženjerka prometa. *E-mail:* monika.bastijanic@gmail.com
[2] Mr. sc., predavač, Veleučilište u Rijeci, Vukovarska 58, Rijeka, Hrvatska. *E-mail:* mirta.mataija @veleri.hr
[3] Mr. sc., viši predavač, Veleučilište u Rijeci, Vukovarska 58, Rijeka, Hrvatska. *E-mail:* mrakams@veleri.hr
[4] Datum primitka rada: 7. 2. 2013.; datum prihvaćanja rada: 3. 4. 2013.

Linearno programiranje predstavlja metodu operacijskih istraživanja kojom tražimo maksimum ili minimum linearne funkcije na skupu rješenja sustava linearnih jednadžbi, odnosno nejednadžbi. S druge strane, mrežno planiranje neophodno je pri upravljanju projektima koji su previše složeni da bismo ih mogli voditi samo logičkom analizom. Matematičko modeliranje i optimizacija danas se razvijaju na dva kompatibilna pravca: jedan je teorijski razvoj, a drugi je primjena.

Cilj ovoga rada je primjenom odgovarajućih matematičkih metoda ostvariti maksimalnu dobit od proizvodnje određenih proizvoda, točnije slastica, uz ograničenu raspoloživost određenih sastojaka, potrebnog vremena za izvršenje određenog procesa te njihovih troškova. Željeli smo utvrditi kako postići veću dobit proizvođača, smanjiti troškove same proizvodnje, uvidjeti koji je proizvod uz sličan princip rada najisplativiji, a uz sve to da se održi kvaliteta, te da projekt bude isplativ uz utroške koje smo uložili.

Ovaj rad temelji se na završnom radu („Primjena metoda operacijskih istraživanja pri maksimizaciji prihoda tvrtke Kava Santos d. o. o.“), odnosno diplomskom radu („Analiza troškova i vremena tvrtke Kava Santos d. o. o.“) Monike Bastijanić rađenim pod mentorstvom Mirjane Rakamarić, odnosno Mirte Mataija.

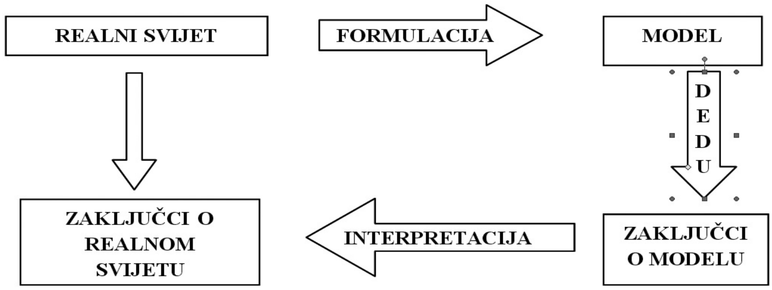
2. MATEMATIČKI MODEL I METODE OPTIMIZIRANJA

Kao i svaki model, i matematički model predstavlja pojednostavljenu sliku promatranog realnog sustava. Možemo reći da je matematički model skup matematičkih relacija kojima su opisane veze između pojedinih fizičkih veličina u promatranom sustavu.

Pri izradi modela treba uočiti veličine sustava bitne za promatrani problem, kao i veze između njih, te dati kriterij za ocjenu kvalitete različitih mogućih rješenja (Pašagić, 1998:12). Sve veličine i odnose za koje procijenimo da ne utječu bitno na rezultat zanemarujemo, odnosno ne uvrštavamo u model. Zbog toga svaki model sadrži određenu razinu apstrakcije. Nakon uočavanja relevantne se veličine, kao i njihove međusobne veze, nastoji opisati matematičkim relacijama. U ovome radu za njihovo opisivanje koristimo linearne relacije - linearne jednadžbe i nejednadžbe. Proces modeliranja grafički je opisan u shemi 1.

Kao što ćemo vidjeti u promatranome primjeru matematički model sustava proizvodnje dan je skupom nejednadžbi koje predstavljaju ograničenja u raspoloživim resursima pri izradi slastica. Alternativno, isti smo proces opisali pomoću mrežnog dijagrama u kojem smo u vrhovima istaknuli aktivnosti značajne za analizu vremena i troškova potrebnih za realizaciju projekta, u ovom slučaju pečenja odabranih vrsta slastica.

Shema 1. Proces modeliranja



Izvor: Pašagić (1998:15)

Charnesova M procedura je varijanta simpleks metode namijenjena prvenstveno rješavanju problema minimuma u kojima je skup ograničenja opisan mješovitim nejednadžbama. U model se uvode dodatne, odnosno dopunske varijable, kako bi se nejednadžbe „pretvorilo" u jednadžbe, te umjetne varijable, koje nemaju nikakvo značenje nego su potrebne samo kako bi se dobilo početno prihvatljivo bazično rješenje. Umjetnim varijablama u funkciji cilja pripisuje se koeficijent M koji označava neodređeni, ali velik broj. Otuda dolazi i naziv ove metode, odnosno procedure. Moguća su dva slučaja u kojima problem nema optimalno rješenje. U prvom slučaju ograničenja su kontradiktorna i samim tim skup je mogućih rješenja prazan. Drugi je slučaj da funkcija cilja neograničeno raste – u problemu maksimuma; odnosno pada – u problemu minimuma. Tada kažemo da funkcija nema u konačnosti optimalno rješenje.

Metoda PERT (engl. *program evaluation and review technique*) metoda je mrežnog planiranja kojom se utvrđuju trajanje i troškovi projekta. Koristi se u slučajevima kada ne možemo sa sigurnošću reći koliko će biti trajanje, odnosno troškovi pojedinih aktivnosti u projektu. Da bismo mogli primijeniti metodu PERT potrebno je projekt podijeliti na jednostavne aktivnosti i svakoj od njih procijeniti vrijeme trajanja i troškove. Pritom imamo optimistično vrijeme, pesimistično vrijeme i najvjerojatnije vrijeme izvršenja aktivnosti. Aktivnosti su u mreži predstavljene vrhovima, dok bridovi označavaju redoslijed njihovog izvršavanja, kao i njihovu međusobnu zavisnost. Kao zanimljivost spomenimo da je metoda PERT razvijena za potrebe ministarstva obrane Sjedinjenih Američkih Država, točnije za njihov program razvoja podmornice za lansiranje balističkih projektila Polaris.

3. ANALIZA POSLOVANJA TVRTKE KAVA SANTOS d. o. o.

U ovoj cjelini izvršit ćemo *maksimizaciju prihoda* te *analizu vremena i troškova* u proizvodnji pet različitih vrsta proizvoda. Na konkretnom ćemo primjeru primijeniti dvije metode: *Charnesovu M proceduru* koristit ćemo pri maksimizaciji prihoda tvrtke, a *metodu PERT* pri analizi vremena i troškova proizvodnje.

3.1 Maksimizacija prihoda – Charnesova M procedura

Potrebno vrijeme u minutama, te potrebni sastojci u gramima za pripremu pet vrsta slastica izneseni su dolje u tablici 1:

Tablica 1. Potrebno vrijeme (min) i sastojci (gr) za pripremu navedenih slastica, prodajna cijena te raspoloživi resursi

	OBIČNA ČOK. TORTA	ČOK. TORTA „2"	JAFFA-TORTA	BIJELA PRINCES-TORTA	TORTA S ORASIMA	RASPOLOŽIVI RESURSI
MIKSANJE	9	9	10	20	30	37440
PEČENJE	15	18	15	10	30	42240
KREMA	8	14	18	5	10	52800
GLAZURA	2	2	2	2	3	1056
DEKORACIJA	7	10	3	3	3	1248
PRODAJNA CIJENA	60	70	80	70	70	

Izvor: obrada autorica

Iz tablice je vidljivo koliko je sastojaka potrebno za pripremu pojedine torte (glazura i dekoracija), te potrebno vrijeme za miksanje, pečenje i kremu. Prodajna cijena svakog gotovog proizvoda, te raspoloživi resursi (vrijeme i sastojci) također su dani u tablici. Miksanje, pečenje i krema su vrijednosti izražene u minutama - vrijeme potrebno za pripravak pojedinih proizvoda, dok glazura i dekoracija predstavljaju količinu sastojaka izraženih u gramima. Nadalje, iz tablice je vidljivo da su za izradu 1 kg *obične čokoladne torte* potrebne 32 minute rada, *za* 1 kg *čokoladne torte* 2 potrebna je 41 minuta rada, za 1 kg *jaffa-torte* 43 minute rada, za i kg *bijele princes-torte* 35 minuta rada, te za 1 kg *torte s orasima* 70 minuta rada.

Već je naručeno sedam kilograma *obične čokoladne torte*, deset kilograma *jaffa-torte* te deset kilograma *bijele princes-torte*. Dnevno radno vrijeme tvrtke Kava Santos d. o. o. je osam sati, a u tvrtci su zaposlena tri radnika.

U sljedećem koraku vrijednost pojedine slastice zapisat ćemo pomoću matematičkih varijabli:

x_1 $=x_1$ = količina obične čokoladne torte,

x_2 $=x_2$ = količina čokoladne torte 2,

x_3 $=x_3$ = količina jaffa-torte,

x_4 $=x_4$ = količina bijele princes-torte,

x_5 $=x_5$ = količina torte s orasima.
Sve su količine izražene u kilogramima.

Proces proizvodnje ovih pet vrsta slastica opisan je sljedećim linearnim modelom:

$max z = 60x_1 + 70x_2 + 80x_3 + 70x_4 + 70x_5$

$max z = 60x_1 + 70x_2 + 80x_3 + 70x_4 + 70x_5$

$9x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 30x_5 \leq 37440$

$9x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 30x_5 \leq 37440$ – *vrijeme potrebno za miksanje*

$15x_1 + 18x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 30x_5 \leq 42240$

$15x_1 + 18x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 30x_5 \leq 42240$ – *vrijeme potrebno za pečenje*

$8x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 5x_4 + 10x_5 \leq 52800$

$x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 5x_4 + 10x_5 \leq 52800$ – *vrijeme potrebno za izradu kreme*

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq 1056$

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq 1056$ – *sastojci potrebni za glazuru*

$7x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 \leq 1248$

$7x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 \leq 1248$ – *sastojci potrebni za dekoraciju*

$x_1 \geq 7$ $x_1 \geq 7$ – *plan za izradu obične čokoladne torte (naručeno sedam kilograma torti)*

$x_3 \geq 10$ $x_3 \geq 10$ – *plan za izradu jaffa-torte (naručeno deset kilograma torti)*

$x_4 \geq 10 x_4 \geq 10$ – *plan za izradu bijele princes-torte (naručeno deset kilograma torti)*

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$

Program se može riješiti nekim od brojnih programskih paketa koji postoje na tržištu, kao što je npr. WinQSB, Lindo i slično. U ovom slučaju program je riješen WinQSB programom, ali ćemo prvih nekoliko koraka rješavanja Charnesovom M procedurom rješavati "ručno" i opisati detaljno uz popratna objašnjenja, kako bismo s pedagoškog stanovišta opisali njegovu logiku.

Prvi korak je "pretvorba" nejednadžbi u jednadžbe dodavanjem dodatnih, odnosno oduzimanjem dopunskih varijabli:

$$maxz - 60x_1 - 70x_2 - 80x_3 - 70x_4 - 70x_5 = 0$$

$$\begin{aligned}
9x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 30x_5 + x'_6 &= 224640 \\
15x_1 + 18x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 3x_5 + x'_7 &= 253440 \\
8x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 5x_4 + 10x_5 + x'_8 &= 316800 \\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x'_9 &= 1056 \\
7x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + x'_{10} &= 1248 \\
x_1 - x''_{11} &= 7 \\
x_3 - x''_{13} &= 10 \\
x_4 - x''_{15} &= 10
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x'_6, x'_7, x'_8, x'_9, x'_{10}, x''_{11}, x''_{13}, x''_{15}, x'''_{12}, x'''_{14}, x'''_{16} \geq 0$$

U prvih pet ograničenja varijable su dodane jer je lijeva strana bila manja ili jednaka desnoj. To znači da će vrijednost svake od tih dodatnih varijabli predstavljati razliku između utroška i raspoložive količine pojedinog resursa, odnosno količinu resursa koja ostaje neiskorištena. U preostala tri ograničenja varijable se oduzimaju jer je lijeva strana bila veća ili jednaka desnoj. To znači da će vrijednost svake od tih dopunskih varijabli predstavljati razliku između stvarne vrijednosti varijable (u našem slučaju broj kilograma nekih torti koji će se proizvesti) i zahtijevane minimalne količine kao posljedice već postojećih narudžbi. Vidimo da bi u ovakvom baznom rješenju varijable $x''_{11}, x''_{13}, x''_{15} x''_{11}, x''_{13}, x''_{15}$ imale negativne vrijednosti što nije dopušteno i nema smisla, pa da bismo dobili prihvatljivo početno bazično rješenje u kojem su bazične varijable negativne moramo u sustav dodati još i umjetne varijable $x'''_{12}, x'''_{14}, x'''_{16}, x'''_{12}, x'''_{14}, x'''_{16},$ čime sustav poprima slijedeći oblik:

$$maxz - 60x_1 - 70x_2 - 80x_3 - 70x_4 - 70x_5 = 0$$

$$\begin{aligned}
9x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 30x_5 + x'_6 &= 224640 \\
15x_1 + 18x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 3x_5 + x'_7 &= 253440 \\
8x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 5x_4 + 10x_5 + x'_8 &= 316800 \\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x'_9 &= 1056 \\
7x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + x'_{10} &= 1248 \\
x_1 - x''_{11} + x'''_{12} &= 7 \\
x_3 - x''_{13} + x'''_{14} &= 10 \\
x_4 - x''_{15} + x'''_{16} &= 10
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x'_6, x'_7, x'_8, x'_9, x'_{10}, x''_{11}, x''_{13}, x''_{15}, x'''_{12}, x'''_{14}, x'''_{16} \geq 0$$

Budući da su bazične varijable x'''_{12}, x'''_{14}, $x'''_{16}x'''_{12}$, x'''_{14}, x'''_{16} umjetne tj. nemaju nikakvo značenje, moramo se osigurati da one u optimalnom rješenju imaju vrijednost nula. Kod problema maksimizacije to ćemo postići dodajući funkciji cilja izraze: $-Mx'''_{12}-Mx'''_{12}$, $-Mx'''_{14}-Mx'''_{14}$ i $-Mx'''_{16}-Mx'''_{16}$ u kojima M predstavlja neki jako velik, neodređen broj.

Dakle, vrijedi:

$$max\ z = 60x_1 + 70x_2 + 80x_3 + 70x_4 + 70x_5 - Mx'''_{12} - Mx'''_{14} - Mx'''_{16}$$

Uvođenjem tih izraza u nulti redak doveli smo linearni program do oblika u kojem umjetne varijable još uvijek nisu bazične jer postoje u dva retka. Da bi postale bazične moramo ih eliminirati iz nultog retka. To radimo množeći jednadžbe ograničenja koje sadrže umjetne varijable sa -M i dodajući ih nultom retku. Time se on potpuno mijenja, pa linearni program sada izgleda ovako:

$$maxz - 60x_1 - 70x_2 + (M-80)x_3 + (M-70)x_4 - 70x_5 + Mx''_{11} + Mx''_{13} + Mx''_{15} = 0$$

$$\begin{aligned}
9x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 30x_5 + x'_6 &= 224640\\
15x_1 + 18x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 3x_5 + x'_7 &= 253440\\
8x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 5x_4 + 10x_5 + x'_8 &= 316800\\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x'_9 &= 1056\\
7x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + x'_{10} &= 1248\\
x_1 - x''_{11} + x'''_{12} &= 7\\
x_3 - x''_{13} + x'''_{14} &= 10\\
x_4 - x''_{15} + x'''_{16} &= 10
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x'_6, x'_7, x'_8, x'_9, x'_{10}, x''_{11}, x''_{13}, x''_{15}, x'''_{12}, x'''_{14}, x'''_{16} \geq 0$$

Time smo dobili početno bazično rješenje:

$z = 0$; $x'_6 = 224640$; $x'_7 = 253440$; $x'_8 = 316800$; $x'_9 = 1056$; $x'_{10} = 1248$; $x'''_{12} = 7$; $x'''_{14} = 10$; $x'''_{16} = 10$; sve ostale varijable imaju vrijednost 0.

Sada se sustav dalje rješava simpleks metodom pomoću tablica koje u ovom radu zbog opširnosti nećemo prikazati i dobiva se sljedeće optimalno rješenje:

$$\begin{bmatrix} z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x'_6 \\ x'_7 \\ x'_8 \\ x'_9 \\ x'_{10} \\ x''_{11} \\ x'''_{12} \\ x''_{13} \\ x'''_{14} \\ x''_{15} \\ x'''_{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32293 \\ 7 \\ 0 \\ 390 \\ 10 \\ 0 \\ 33280 \\ 36190 \\ 45680 \\ 243 \\ 0 \\ 0 \\ 380 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na temelju dobivenog rješenja vidimo da Tvrtka Kava Santos d. o. o., kako bi maksimizirala prihod od vlastite proizvodnje pet vrsta slastica i pri tome zadovoljila sva dana ograničenja, treba proizvesti:

- 7 kilograma obične čokoladne torte ($x_1 x_1$ = 7),

- 390 kilograma jaffa-torti ($x_3 x_3$ = 390),

- 10 kilograma bijelih princes-torti (x_4 (x_4 = 10).

Pri takvoj će se proizvodnji postići maksimalni tjedni prihod koji će iznositi 32.293 kn (z = 32.293).

Pritom će ostati neiskorišteno:

- 33.280 minuta vremena za miksanje ($x'_6 = 33280$ $x'_6 = 33280$ je dodatna varijabla iz ograničenja (1) koja se odnosi na potrebno vrijeme za miksanje),

- 36.190 minuta vremena za pečenje ($x'_7 x'_7$ = 36190 je dodatna varijabla iz ograničenja (2) koja se odnosi na potrebno vrijeme za pečenje),

- 45.680 minuta vremena za izradu kreme ($x'_8 = 45680$ $x'_8 = 45680$ je dodatna varijabla iz ograničenja (3) koja se odnosi na potrebno vrijeme za izradu krema),

- 243 grama potrebnih sastojaka za pripremu glazure ($x'_9 x'_9$ = 243 je dodatna varijabla iz ograničenja (4) koja se odnosi na potrebne sastojke za glazuru).

Količina sastojaka za dekoraciju potpuno je iskorištena ($x'_{10} x'_{10}$ je dopunska varijabla iz ograničenja (5) koji se odnosi na sastojke potrebne za dekoraciju).

3.2 Analiza vremena i troškova – metoda PERT

U sljedećem koraku izvršit ćemo analizu vremena i troškova na temelju poznatih podataka. Analizu vremena i troškova napravit ćemo za običnu čokoladnu tortu. Količinu sastojaka potrebnih za pripremu glazure i dekoracije zamijenit ćemo potrebnim vremenom za pripremu istih. Radi lakšeg razumijevanja aktivnosti i njihove zavisnosti prikazat ćemo u tablici 2.

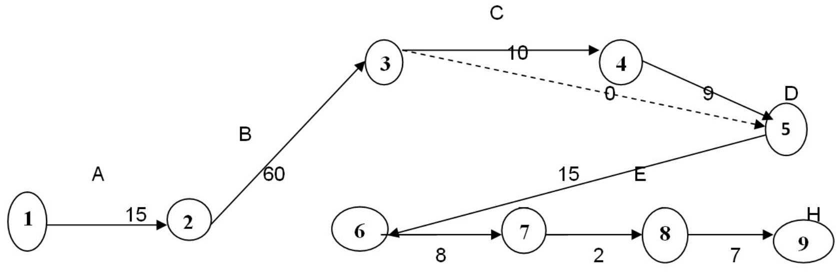
Tablica 2. Prikaz aktivnosti, njihovo trajanje i zavisnost

Naziv i oznaka aktivnosti	**Trajanje**	**Preduvjet**
Narudžba sastojka - **A**	15	–
Isporuka sastojka - **B**	60	A
Priprema za rad (uzimanje potrebnih sastojka, opreme...) - **C**	10	B
Miksanje (izrada biskvita) - **D**	9	C
Pečenje - **E**	15	C, D
Krema - **F**	8	E
Glazura - **G**	2	F
Dekoracija (završetak) - **H**	7	G

Izvor: obrada autorica

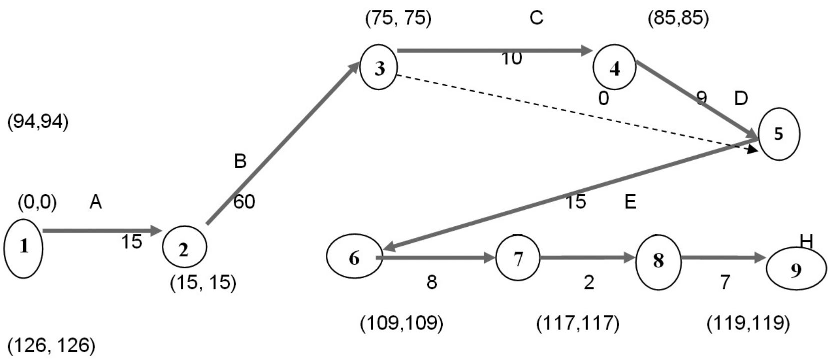
Na temelju podataka iz tablice zadatak ćemo riješiti mrežnim dijagramom.

Grafikon 1. Prikaz aktivnosti po trajanju (mrežni dijagram)



Izvor:obrada autorica

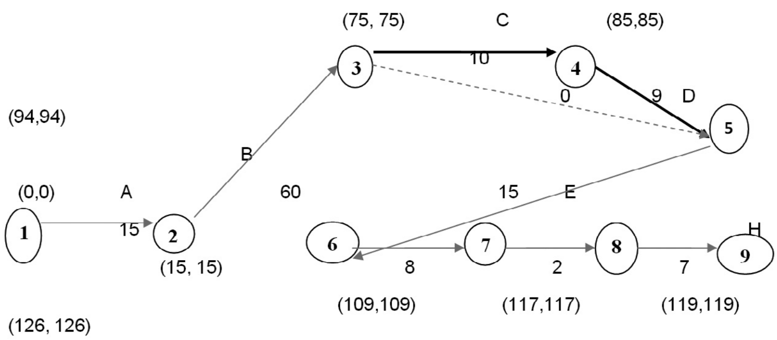
Grafikon 2. Određivanje i prikaz kritičnog puta 1.



Izvor: obrada autorica

Budući da se u mreži nalaze dva kritična puta, kao što je vidljivo sa slike, prikazat ćemo i drugi kritični put te izračunati ukupnu, slobodnu i nezavisnu rezervu tih aktivnosti te izvršiti analizu vremena i troškova.

Grafikon 3. Određivanje i prikaz kritičnog puta 2.



Izvor:obrada autorica

Kritični put iz grafikona 1: **1-2-3-4-5-6-7-8-9**, a *kritični put iz grafikona 2.*: **1-2-3-5-6-7-8-9.**
Iz navedenih grafova izračunat ćemo ukupnu, slobodnu i nezavisnu rezervu tih aktivnosti (tablica3):

Tablica 3. Tablica ukupne, slobodne i nezavisne vremenske rezerve

i-j	t_{ij}	$t_i^{(0)}$	$t_j^{(0)}$	$t_i^{(1)}$	$t_j^{(1)}$	S_{tij}	S_{sij}	S_{nij}
1-2	15	0	15	0	15	**0**	**0**	**0**
2-3	60	15	75	15	75	**0**	**0**	**0**
3-4	10	75	85	75	85	**0**	**0**	**0**
3-5	0	75	94	75	94	**19**	**19**	**19**
4-5	9	85	94	85	94	**0**	**0**	**0**
5-6	15	94	109	94	109	**0**	**0**	**0**
6-7	8	109	117	109	117	**0**	**0**	**0**
7-8	2	117	119	117	119	**0**	**0**	**0**
8-9	7	119	126	119	126	**0**	**0**	**0**

Izvor: obrada autorica

Ukupna vremenska rezerva dobije se po formuli:

$$S_{tij}S_{tij} = tj^{(1)}tj^{(1)} - ti^{(0)}ti^{(0)} - t_{ij}t_{ij}$$

Slobodna vremenska rezerva dobije se po formuli:

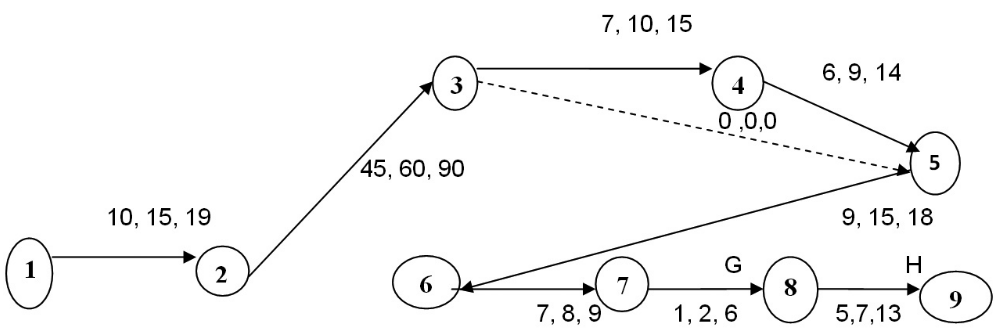
$$S_{sij}S_{sij} = tj^{(0)}tj^{(0)} - ti^{(0)}ti^{(0)} - t_{ij}t_{ij}$$

Nezavisna vremenska rezerva dobije se po formuli:

$$S_{nij}S_{nij} = tj^{(0)}tj^{(0)} - ti^{(1)}ti^{(1)} - t_{ij}t_{ij}$$

U sljedećem koraku izvršit ćemo *analizu vremena* te vidjeti kolika je *vjerojatnost* da će taj projekt (slastica) biti izvršena u navedenom roku.

Grafikon 4. Prikaz optimističkog, normalnog i pesimističkog trajanja aktivnosti pomoću kojeg ćemo izvršiti analizu vremena



Izvor:obrada autorica

Tablica 4. Tablica očekivanog vremena i varijanca

Aktivnosti	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}	$t_{e(ij)}$	σ_{ij}
1-2	10	15	19	**14,83**	**2,25**
2-3	45	60	90	**62,5**	**56,25**
3-4	7	10	15	**10,33**	**1,77**
3-5	0	0	0	**0**	**0**
4-5	6	9	14	**9,33**	**1,77**
5-6	9	15	18	**14,5**	**2,25**
6-7	7	8	9	**8**	**0,11**
7-8	1	2	6	**2,5**	**0,69**
8-9	5	7	13	**7,66**	**1,33**

Izvor:obrada autorica

Metoda PERT uzima u obzir nesigurnost pri određivanju pojedinih aktivnosti. Za svaku se aktivnost zato zadaju tri vremena: *optimistično trajanje* $a_{ij}a_{ij}$, *normalno trajanje* $m_{ij}m_{ij}$ i *pesimističko trajanje* $b_{ij}b_{ij}$.

Treba istaknuti da je kod sva tri vremena riječ o procjenama, te da, teoretski, vrijeme trajanja neke aktivnosti može biti izvan intervala (a, b), naročito u slučaju katastrofe ili djelovanjem nekih nepredvidivih nepovoljnih čimbenika, ali da je statistički gledano ta vjerojatnost zanemarivo mala. Metoda PERT pretpostavlja da se stvarno trajanje aktivnosti ponaša prema beta-razdiobi.

Očekivano vrijeme trajanja aktivnosti kod beta-razdiobe iznosi:

$$t_{e\,(ij)}t_{e\,(ij)} = \frac{a_{ij}+4m_{ij}+b_{ij}}{6}\frac{a_{ij}+4m_{ij}+b_{ij}}{6}$$

Kod većine unimodalnih distribucija (s jednim ekstremom) početna i krajnja vrijednost leže unutar triju standardnih devijacija, od očekivane vrijednosti, tj.

$$b_{ij}b_{ij} - a_{ij}a_{ij} = 6\,\sigma\sigma$$

pa *standardna devijacija iznosi*:

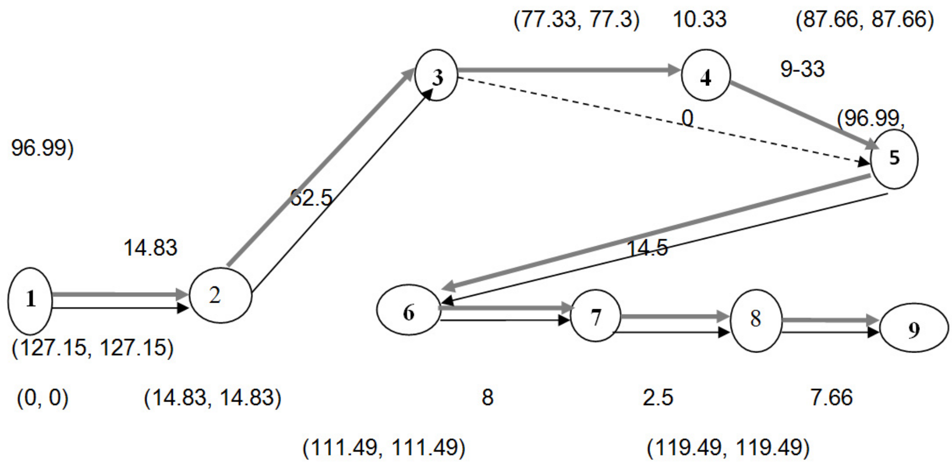
$$\sigma\sigma = \frac{b-a}{6}\frac{b-a}{6}.$$

Varijanca distribucije jest kvadrat standardne devijacije, dakle:

$$\sigma^2\sigma^2 = \frac{(b_{ij}-a_{ij})^2}{36}\frac{(b_{ij}-a_{ij})^2}{36}$$

U sljedećem koraku na temelju izračunatog očekivanog vremena trajanja aktivnosti odredit ćemo kritični put pomoću grafa te izračunati varijancu:

Grafikon 5. Mrežni dijagram



Izvor: obrada autorica

Iz priložene slike vidimo da se na grafikonu nalaze dva kritična puta.

Grafikon 5. prikazuje sa kritični put 1., a kritični put 2.

Varijanca projekta izračunava se kao zbroj varijanci na kritičnom putu:

$$\sigma_{e(1-2)}\sigma_{e(1-2)} = \left(\frac{(b_{ij}-a_{ij})}{6}\right)^2\left(\frac{(b_{ij}-a_{ij})}{6}\right)^2 = \left(\frac{19-10}{6}\right)^2\left(\frac{19-10}{6}\right)^2 = 2,25\ldots..$$

Dakle, varijanca trajanja projekta jednaka je zbroju varijance po kritičnom putu. Kako postoje dva kritična puta, dobit ćemo i dvije varijance:

$\sigma_1\sigma_1$ = 2,25 + 56,25+1,77+ 1,77+ 2,25+ 0,11+ 0,11+1,33 = 65,84

$\sigma_2\sigma_2$= 2,25 + 56,25+ 0 + 2,25+ 0,11+ 0,11+1,33 = 62,3

Za varijancu projekta uzima se veća varijanca, što za ovaj primjer iznosi: σ_1: σ_1 = 65,84.

Planirani rok završetka slastice je 130 minuta.

Vjerojatnost da projekt bude završen u planiranom vremenu računa se na sljedeći način:

$$Z_i Z_i = \frac{(Ts)i-(Te)i}{\sqrt{\Sigma\sigma^2}}\frac{(Ts)i-(Te)i}{\sqrt{\Sigma\sigma^2}}$$

te u našem slučaju iznosi:

$$Z_9 Z_9 = \frac{(Ts)i-(Te)i}{\sqrt{\Sigma\sigma^2}}\frac{(Ts)i-(Te)i}{\sqrt{\Sigma\sigma^2}} = \frac{130-127{,}15}{\sqrt{65{,}84}}\frac{130-127{,}15}{\sqrt{65{,}84}} = \frac{2{,}85}{8{,}114}\frac{2{,}85}{8{,}114} = 0,35$$

$$P_9 P_9 = 0{,}655 = 65,5\ \%$$

Zaključujemo da je vjerojatnost da se obična čokoladna torta napravi u predviđenom vremenu iznosi 0.655, odnosno 65.5%. U ovu procjenu uključeno je vrijeme potrebno za narudžbu i isporuku sastojaka, te pripremu za rad.

U sljedećem koraku izvršit ćemo analizu troškova za pripremu obične čokoladne torte dobivenu na temelju potrebnih sastojka i potrebnih sati za izvršenje zadanog zadatka.

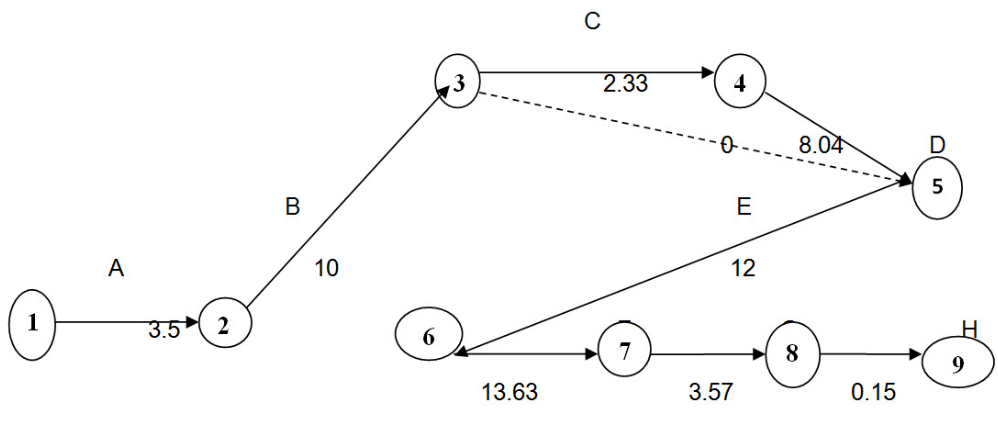
Tablica 5. Prikaz aktivnosti, njihovo trajanje, zavisnost i troškovi

Naziv i oznaka aktivnosti	**Sastojci (kg) i vrijeme potrebno za isporuku potrebnih sastojka (min)**	**Preduvjet**	**Troškovi (kn)**
Narudžba sastojka - A	15	–	3,5
Isporuka sastojka - B	60	A	10
Priprema za rada (uzimanje potrebnih sastojka, opreme) - C	10	B	2,33
Biskvit D	0,71725	C	8,04
Pečenje - E	15	C, D	12
Krema - F	0,32475	E	13,63
Glazura - G	2,116	F	3,57
Dekoracija (završetak) – H	0,005	G	0,15

Izvor: obrada autorica

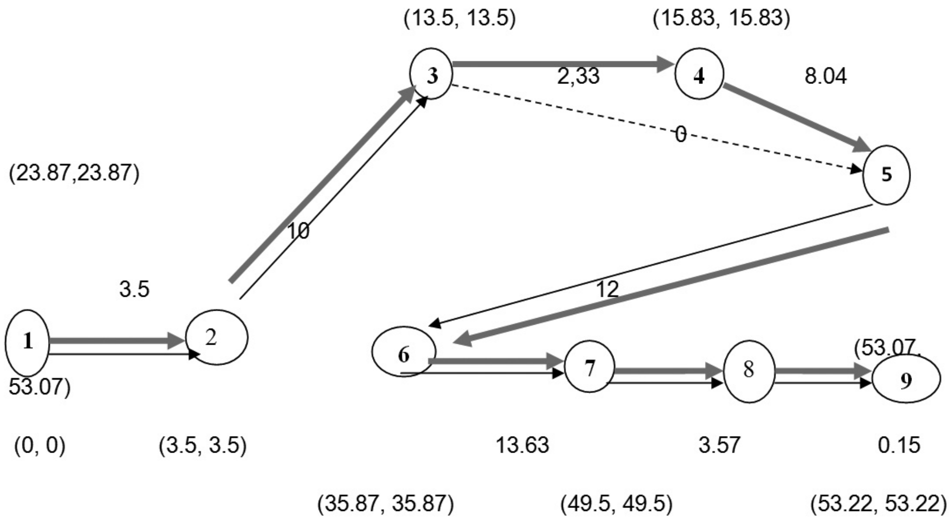
Iz tablice su vidljive aktivnosti, njihov trošak i vrijeme trajanja.

Grafikon 6. Mrežni dijagram (prikaz aktivnosti po troškovima)



Izvor: obrada autorica

Grafikon 7. Određivanje kritičnog puta pomoću mrežnog dijagrama



Izvor: obrada autorica

Iz navedenog grafikona vidljivo je da se nalaze dva kritična puta: 1-2-3-4-5-6-7-8-9 te 1-2-3-5-6-7-8-9.

Očekivano vrijeme za pripremu obične čokoladne torte je 127.15 minuta. Iz tablice vjerojatnosti za normalnu razdiobu vidimo da je vjerojatnost završetka slastice u predviđenom roku jednaka $\emptyset(0.35) = 0.655\emptyset(0.35) = 0.655$ odnosno 65.5 %, te vjerojatnost da će slastica biti izvršena u planiranom roku od 130 minuta iznosi 65.5 %.

Priprema ove slastice za poduzeće predstavlja 53.22 kune troška, uzimajući u obzir isporuku, pečenje, sate rada radnika te potrebne sastojke.

4. ZAKLJUČAK

Metode operacijskih istraživanja (Charnesova M procedura) i kvantitativne metode (metoda PERT) služe nam za rješavanje problema u kojima s jedne strane želimo maksimizirati prihod ili minimizirati troškove uz postavljena ograničenja, dok s druge strane uz ista ta ograničenja omogućuju analizirati vrijeme i troškove. Na samom početku, prije izrade rada, bitno je dobro definirati problem i odrediti metode rješavanja. Kod maksimizacije prihoda glavna i polazna osnova nam je postavljanje cilja u obliku linearne funkcije cilja te formuliranje postojećih uvjeta u obliku ograničenja, izraženih linearnim jednadžbama i nejednadžbama. Kod analize vremena i troškova polazna osnova nam je da u što kraćem vremenu, uz što manje raspoloživih resursa postignemo što veću dobit.

Primjenom gore spomenutih matematičkih metoda za analizu poslovanja tvrtke Kava Santos d. o. o. dobili smo smjernice za maksimizaciju prihoda uz zadovoljenje svih postavljenih uvjeta i zadržavanje iste razine kvalitete. Također smo za tvrtkin proizvod „obična čokoladna torta" napravili analizu vremena i troškova izrade, te izračunali vjerojatnost da proizvod bude završen u traženom roku. Ova saznanja mogu pridonijeti boljem poslovanju tvrtke. Naša je preporuka da se ovakva istraživanja apliciraju u svim tvrtkama, bez obzira bile one velike ili male, jer je za opstanak tvrtke bitno dobro procijeniti vrijeme i trošak za obavljanje određenog zadatka, a uz male izmjene poslovanja mogu se ostvariti velike promjene u prihodima, što je osobito važno u današnjim kriznim uvjetima na tržištu.

LITERATURA

Babić, Z. (2003) *Linearno programiranje,* Zagreb

Barković, D. (2002) *Operacijska istraživanja,* Osijek

Bastijanić, M. (2010) *Primjena metoda operacijskih istraživanja pri maksimizaciji prihoda tvtke Kava Santos d. o. o.,* završni rad, Rijeka: Veleučilište u Rijeci

Bastijanić, M. (2012) *Analiza troškova i vremena tvrtke Kava Santos d. o. o.,* specijalistički završni rad, Rijeka: Veleučilište u Rijeci

Marković S., Raspor S. (2008) *Statistika*, Rijeka: Veleučilište u Rijeci

Neralić, L. (2003) *Uvod u matematičko programiranje*, Zagreb

Pašagić, H. (1998) *Matematičko modeliranje i teorija grafova,* Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti

Pašagić, H. (2003) *Matematičko modeliranje i teorija grafova,* Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti

Pašagić, H. (2003) *Matematičke metode u prometu,* Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti

Monika Bastijanić[1]
Mirta Mataija[2]
Mirjana Rakamarić Šegić[3]

Professional paper
UDC 519.8:658.5

MATHEMATICAL METHODS USED TO ANALYZE AND ASSESS BUSINESS OPERATIONS OF KAVA SANTOS D. O. O.[4]

ABSTRACT

This paper is based on the application of the results obtained using scientific discipline 'Operations Researches' – directed to the field of linear programming and network planning with the aim of analysing business operations of the company Kava Santos d.o.o whose business activities are based on the pastry production for their own needs as well as for those of their business partners. The purpose of this paper has been to maximize the income of the company Kava Santos d.o.o. by applying relevant mathematical methods in the segment which refers to the production of five different types of pastries with pre-set restrictions. The latter comprising the availability of certain ingredients as well as human resources, time necessary to carry out certain activities and their cost. The analysis of business operations has been carried out using two complementary methods which belong to the above mentioned scientific discipline i.e. the Charnes M procedure, used in the first part, and the Pert method used in the second part of the paper. In order for these methods to be efficiently applied to a specific task, the process of pastry production has been divided into separate components i.e. activities taking into consideration the time and the cost necessary to carry out each of them. Applying mathematical methods to the analysis of business operations of the company Kava Santos d.o.o., the results obtained can be used to reduce production time and cost, determine which product using the same principle of production is the most cost effective, and thus eventually ensure bigger profit for the producer and at the same time maintain the quality of the product.

Key words: *linear programming, Operations Researches, Charnes M procedure, Pert method*

1 Student, Professional Specialist in Transport Engineering. E-mail: monika.bastijanic@gmail.com
2 MSc, Lecturer, Polytechnic of Rijeka, Vukovarska 58, Rijeka, Croatia. E-mail: mirta.mataija @ veleri.hr
3 MSc, Senior Lecturer, Polytechnic of Rijeka, Vukovarska 58, Rijeka, Croatia. E-mail: mrakams@veleri.hr
4 Received: 7. 2. 2013; accepted: 3. 4. 2013